

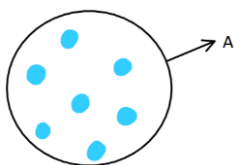
Chapitre 1 : COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

1. Cardinal d'un ensemble A

Déf 1 :

Soit A un ensemble fini,
 On appelle le **CARDINAL DE A** :
Card(A) = nombre d'éléments de A

Ex 1 :



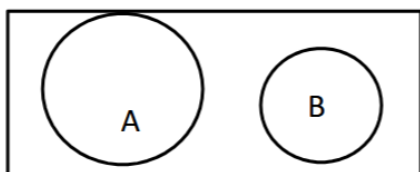
Alors,

Card (A) = 7

2. Ensembles disjoints A et B

Déf 2 :

Soient A et B deux ensembles
 On dit que **A et B sont DISJOINTS**
Si $A \cap B = \emptyset$
 (Card ($A \cap B$) = 0)

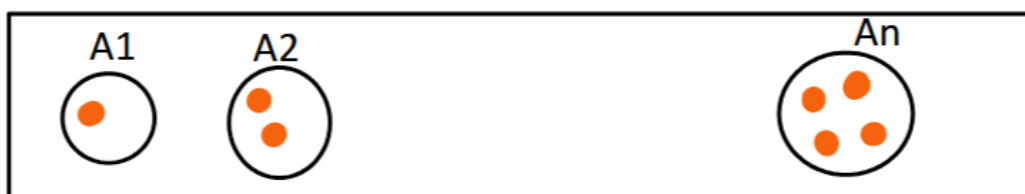


Prop 1 :

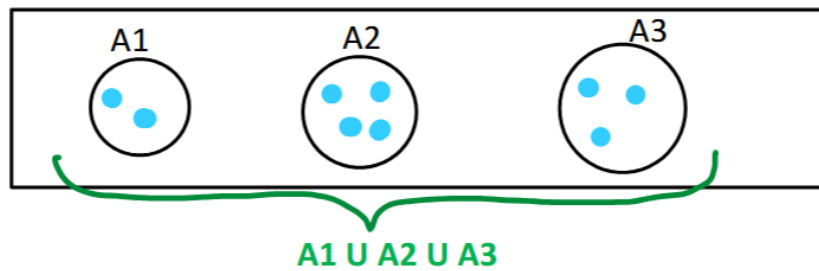
Soit $n \in \mathbb{N}$.
 Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n ensembles finis **deux à deux disjoints**.

$\Rightarrow$

$$\text{card} (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{card} (A_1) + \text{card} (A_2) + \dots + \text{card} (A_n)$$



Ex 3 :



A1, A2 et A3 sont deux à deux disjoints.

Ici,

- Card (A1) = 2
- Card (A2) = 4
- Card (A3) = 3
- Card (**A1 U A2 U A3**) = 9 = Card (A1) + Card (A2) + Card (A3) = 2 + 4 + 3

3. Produit cartésien A x B

Déf 3 :

Soient A et B deux ensembles non vides

Le **PRODUIT CARTÉSIEN DE A ET B** est :

$$A \times B = \{(x; y), x \in A, y \in B\}$$

Ex 4 :

A = {4 ; 5} et B = {6 ; 7}

Alors

$A \times B = \{(4; 6), (4; 7), (5; 6), (5; 7)\}$



On note que :

- Card (A) = 2
- Card (B) = 2
- Card (A x B) = 4 = 2 x 2 = card(A) x card (B)

Prop 2 :

Soient A et B deux ensembles non vides

⇒

$$\text{Card } (A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$$

4. n-uplet A^n

Déf 4 :

Soient A un ensemble non vide

Soit $n \in \mathbb{N}$

Le **n-uplet de A** est :

$$A^n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n), x_i \in A\}$$

Ex 3 :

$$A = \{4; 7\}$$

Alors

Les 3-uplets de A sont :

$$A^3 = \{(4; 4; 4); (4; 4; 7); (4; 7; 4); (7; 4; 4); (4; 7; 7); (7; 4; 7); (7; 7; 4); (7; 7; 7)\}$$



On note que :

- $\text{Card}(A) = 2$
- $\text{Card}(A^3) = 8 = 2^3 = \text{Card}(A)^3$

Prop 3 :

Soit A un ensemble non vide

$\Rightarrow$

$$\text{card}(A^n) = [\text{card}(A)]^n$$

5. k arrangements de A

Déf 5 :

Soit A un ensemble non vide tel que:

- $\text{Card}(A) = n$
- $k \in \mathbb{N}$

Alors, un **k-ARRANGEMENT DE A** est tel que:

k -ARRANGEMENT DE A = k - uplet d'éléments distincts de A

Ex 4 :

$$A = \{4 ; 7 ; 9\}$$

Alors

Les 2-arrangements de A sont :

$$\{(4 ; 7), (4 ; 9), (7 ; 4), (7 ; 9), (9 ; 4), (9 ; 7)\}$$



On note que :

- Card (A) = 3
- Card (2-arrangements de A) = 6 = $3 \times 2 \times 1 = 3! = \text{card}(A)!$

Prop 3 :

Soit A un ensemble non vide tel que :

- Card (A) = n
- $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$

$$\text{Card (k-ARRANGEMENT DE A)} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

X1	X2	...	Xk
n choix (tous les éléments de A)	(n-1) choix restants	...	(n-k+1) choix restants

6. Permutations de A

Déf 6 :

Soit A un ensemble non vide tel que:

- Card (A) = n

Une **PERMUTATION DE A** est telle que :

PERMUTATION DE A = n-uplet d'éléments distincts de A

Ex 5 :

$A = \{4 ; 7 ; 9\}$

Alors

Les permutations de A sont :

$\{4 ; 7 ; 9\} \{4 ; 9 ; 7\} \{7 ; 9 ; 4\} \{7 ; 4 ; 9\} \{9 ; 7 ; 4\} \{9 ; 4 ; 7\}$



On note que :

- $\text{Card}(A) = 3$
- $\text{Card}(\text{permutations de } A) = 6 = 3 \times 2 \times 1 = 3! = \text{card}(A) !$

Prop 4 :

Soit A un ensemble non vide tel que :

- $\text{Card}(A) = n$

$\Rightarrow$

$\text{Card}(\text{PERMUTATIONS DE } A) = n !$

X1	X2	...	Xn
n choix (tous les éléments de A)	(n-1) choix restants	...	1 choix restant

7. Parties de A

Déf 7 :

Soit A un ensemble non vide.

Une **PARTIE DE A** est telle que :

$\{\text{PARTIES DE } A\} = \{\text{sous-ensembles de } A\}$

Ex 5 :

$$A = \{4 ; 7 ; 9\}$$

Alors,

Les parties de A sont :

$$\{\emptyset, \{4\}, \{7\}, \{9\}, \{4 ; 7\}, \{4 ; 9\}, \{7 ; 9\}, \{4 ; 7 ; 9\}\}$$



On note que :

- $\text{card}(A) = 3$
- $\text{card}(\{\text{parties de } A\}) = 8 = 2^3 = 2^{\text{card}(A)}$

Prop 5 :

Soit A un ensemble non vide tel que :

- $\text{Card}(A) = n$

$\Rightarrow$

$$\text{Card}(\{\text{PARTIES DE } A\}) = 2^n$$

(Pour faire un sous-ensemble de A :

- pour chaque éléments de A, il y a 2 choix :
 - l'intégrer dans le sous- ensemble
 - ou ne pas l'intégrer dans le sous ensemble
- comme il y a n éléments dans A il y a au total 2^n choix)

8. Combinaisons de A

Déf 8 :

Soit A un ensemble non vide tel que :

- $\text{Card}(A) = n$
- $k \in \mathbb{N}$

Une **COMBINAISON DE k ELEMENTS DE A** est telle que :

$$\{\text{COMBINAISON DE k ELEMENTS DE A}\} = \{\text{sous-ensembles de A à k éléments}\}$$

Ex 6 :

$$A = \{4 ; 7 ; 9\}$$

Alors,

Les combinaisons de k=2-éléments de A sont :

$$\{\{4 ; 7\}, \{4 ; 9\}; \{7 ; 9\}\}$$



On note que :

- $\text{card}(A) = 3$
- $\text{card}(\{\text{combinaisons de k=2-éléments de A}\}) = 3 = \frac{3!}{2!1!} = \binom{3}{2} = \binom{\text{card}(A)}{k=2}$

Prop 6 :

Soit A un ensemble non vide tel que :

- $\text{Card}(A) = n$
- $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$

$$\text{Card}(\{\text{COMBINAISONS DE k-éléments de A}\}) = \binom{n}{k}$$

Où :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$